L3 SM UE504P	Université de Tours	Année 2012-2013

Méthodes mathématiques pour la physique

18/12/2012 **durée: 3h**

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x) = |\cos \pi x|$.

1. Dessiner le graphe de $f(x)$ et déterminer sa période.
2. Développer $f(x)$ en série de Fourier adaptée aux propriétés de parité.
3. Pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle?

Exercice 2. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - 11y'(x) + 10y(x) = e^{2x},$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Vérifier le résultat.

Exercice 3. A l'aide de la fonction de Green, résoudre l'équation

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1,$$

munie des conditions limites $y(2) = y'(3) = 0$.

Exercice 4. Soit $w(x)$ une fonction paire strictement positive sur l'intervalle $I = [-a, a]$.

- Montrer que les polynômes orthogonaux $\{p_{2n}(x)\}_{n=0,1,2,3,...}$ associés à la fonction poids $w(x)$ et à l'intervalle I sont donnés par des fonctions paires, tandis que $\{p_{2n+1}(x)\}_{n=0,1,2,3,...}$ sont impaires.
- Calculer explicitement les polynômes orthogonaux moniques $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ pour $w(x) = x^2 + 1$ et $I = [-2, 2]$.

Exercice 5.

- Simplifiez l'expression
$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)\Gamma\left(\frac{8}{3}\right).$$
- La fonction hypergéométrique ${}_2F_1(a, b, c, z)$ est donnée par l'intégrale
$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt}{(1-zt)^a}.$$
Représentez cette fonction sous forme d'une série ${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ (c'est-à-dire, trouvez les coefficients α_k).

Exercice 6. La fonction

$$g(z) = \frac{1}{4}\wp\left(3z + 1|\omega_1, \omega_2\right) + \frac{5}{12}\wp\left(z|2\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right)$$

est-elle elliptique? Si oui, calculez ses périodes, dessinez son domaine fondamental et indiquez la position et l'ordre de ses pôles.